

TRAÇADO VETORIAL DE CÔNICAS

Ronaldo Cesar Marinho Persiano *
 Programa de Engenharia de Sistemas e Computação
 COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro
 C. P. 68511 CEP 21945 Rio de Janeiro RJ

Sumário

Discute-se um método para a aproximação de cônicas no plano por meio de poligonais. O método gera os vértices da poligonal sobre a curva pela aplicação iterativa de uma expressão linear. Pela seleção adequada de um parâmetro real controla-se a precisão da aproximação obtida.

Introdução

Em diversas aplicações, o traçado de elipses, parábolas e hipérbolas surge naturalmente. Estas curvas são soluções de equações quadráticas e aparecem, por exemplo, em representações aramadas de superfícies compostas de partes modeladas por funções de segundo grau. A aplicação particular que nos motivou a este estudo foi a do cálculo e traçado de mapas de curvas de nível. Entre os métodos que vimos investigando, temos nos concentrado naqueles em que o domínio da função a mapear é particionado em triângulos em cada um dos quais uma função quadrática é ajustada de forma a que a função global seja de classe $C1$.

O método de traçado que ora propomos é bastante simples e eficiente. Consiste em aproximar-se as cônicas por poligonais cujos vértices pertençam à curva. O cálculo desses vértices é realizado por intermédio da aplicação iterativa de uma mesma transformação linear ao vértice precedente calculado. As componentes desta transformação são obtidas a partir dos coeficientes da quadrática que modela a curva.

* Prof. Adjunto do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ. Chefe do Laboratório de Computação Gráfica da COPPE/UFRJ.

Este trabalho realizou-se com suporte parcial da FINEP e do CNPq.

Traçado de Cônicas

As curvas genericamente denominadas cônicas podem ser caracterizadas como o conjunto de soluções de uma equação quadrática da forma:

$$1 \quad x' Q x + q' x = c$$

onde x é um vetor variável bidimensional, Q é uma matriz simétrica constante 2×2 , q é um vetor constante bidimensional e c é uma constante real, e onde w' denota a matriz transposta de w . Outra forma conveniente de expressar-se a cônica que satisfaz a equação (1) seria em forma paramétrica por intermédio de uma função bidimensional de variável real $x(\cdot)$ desde que $x(t)$ satisfizesse (1) para todo t . O resultado a seguir caracteriza a função $x(\cdot)$ que resolve (1) em forma paramétrica como solução de uma equação diferencial ordinária.

Teorema 1 : Para cada w real não nulo, toda solução $x(\cdot)$ da equação diferencial:

$$(2) \quad \frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{w} \cdot B [2 \cdot Q x(t) + q]$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfaz a $x(t)' Q x(t) + q' x(t) = x(t_0)' Q x(t_0) + q' x(t_0)$ para todo t e t_0 .

De posse deste resultado poderíamos obter o traçado pretendido pela solução numérica da equação diferencial (2). Uma aproximação discreta da solução desta equação decorre da aproximação:

$$3 \quad x(t) = x(t_0) + \frac{dx}{dt}(t_0) \cdot (t - t_0)$$

onde foram desprezados termos de ordem superior. Tomando-se $t_K = t_0 + k \cdot dt$ para dt fixo obtemos:

$$4 \quad x(t_{K+1}) = x(t_K) + \frac{dt}{w} \cdot B [2 \cdot Q x(t_K) + q]$$

A aplicação iterativa de (4) gera uma sequência de pontos $x(t_K)$ a partir de um ponto inicial dado $x(t_0) = x_0$ cuja interligação por meio de uma poligonal aproxima a cônica almejada. O fator dt/w no sistema dinâmico discreto acima controla o passo do método, isto é, quanto menor dt/w menores serão as diferenças entre dois valores consecutivos de $x(t_K)$ e por consequência melhor a aproximação.

Esta abordagem não é contudo tentadora pois a cada iteração o erro inerente à aproximação de (3) acumula-se ocasionando, com o decorrer das iterações, um desvio considerável em relação à curva meta. Confronte-se este método com o DDA discutido por Newman e Sproull[1].

Uma alternativa preferível é construirmos um sistema dinâmico discreto cuja sequência solução atenda, com precisão, a equação (1). O resultado a seguir garante a existência de tal sistema.

Teorema 2: Para cada w real não nulo tal que o determinante de $w.B - Q$ é não nulo, a sequência de pontos $x(k)$ que resolve o sistema

$$(5) \quad x(k+1) = A(w) x(k) + C(w)$$

$$\text{onde } A(w) = I + 2.[w.B - Q]^{-1}Q \quad \text{e} \quad C(w) = [w.B - Q]^{-1}q$$

atende à identidade $x(k)'Qx(k) + q'x(k) = x(0)'Qx(0) + q'x(0)$.

O sistema (5) fornece sequências de soluções que aproximam as curvas soluções de (1) por meio de poligonais. É importante frisar que as diferentes curvas soluções de (1), decorrentes da variação do valor do parâmetro c , podem ser aproximadas pelo mesmo sistema (5) fazendo-se variar ali apenas o valor inicial $x(0)$. Ou seja, as diferentes soluções do sistema dinâmico (5) para diferentes "estados" iniciais $x(0)$ são aproximações das curvas de nível da quadrática que serve de base para a equação (1).

A exatidão computacional dos resultados do método exposto é afetada apenas pelos arredondamentos dos cálculos em ponto flutuante. Além de simplicidade e economia apresenta ainda a flexibilidade de possibilitar não só o traçado de arcos de cônicas genéricas como simplifica sensivelmente o traçado de isolinhas no mapeamento de quadráticas. Um inconveniente apresentado por este método é sua dependência de um valor inicial para operar. Entretanto, na maioria das aplicações a curva almejada é especificada por pelo menos um de seus pontos.

Escolha de w

Como ilustração dos resultados da aplicação deste método apresentamos na fig. 1 as curvas de nível de uma função quadrática geradas com dois valores distintos de w . Observe-se ali como o aumento do valor de w provocou um aumento na precisão da aproximação oferecida pela poligonal. Note-se ainda que o passo do algoritmo é menor nos trechos das curvas em que o raio de curvatura é reduzido garantindo assim uma melhor aproximação.

A dependência existente entre os traçados e o valor de w é bastante útil pois podemos a partir do ajuste deste parâmetro controlar a qualidade final dos resultados. Quanto maiores os valores de w melhores serão as aproximações devido aos menores segmentos compondo à poligonal. No entanto a escolha do valor de w não pode ser feita independentemente dos parâmetros da quadrática.

De fato, se multiplicarmos a equação (1) por uma constante, digamos maior que 1, então o efeito de w será reduzido, como pode ser verificado examinando-se a expressão de $A(w)$ em (5). Esta observação sugere que o valor de w seja escolhido em função dos valores das componentes da matriz Q de (1).

A partir do sistema (5), podemos calcular a diferença $x(k+1)-x(k)$ por meio da expressão:

$$x(k+1)-x(k) = [A(w) - I] x(k) + C(w)$$

Escolhendo-se o valor w de forma a que o determinante de $[A(w)-I]$ independa dos parâmetros do sistema (1) garante-se uma independência entre a aproximação obtida (variação $x(k+1)-x(k)$) e fatores de escala na equação (1) (determinante de Q). Como o determinante de $[A(w)-I]$ é nulo se o determinante de Q é nulo, há dois casos a considerar:

a) se o determinante de Q é não nulo então tome-se $w = \sqrt{(b-1) \cdot \det(Q)}$;

b) se o determinante de Q é nulo então tome-se $w = 10 \cdot b \cdot \sqrt{Q_{12} \cdot Q_{12} + Q_{22} \cdot Q_{22}}$;

onde $\sqrt{(\cdot)}$ é a função raiz quadrada, Q_{12} e Q_{22} são elementos de Q , e b é um parâmetro que controla a precisão da aproximação. Nos dois casos acima garante-se que a variação $x(k+1)-x(k)$ será proporcional a $1/b$. O fator 10 que aparece no caso b) foi determinado experimentalmente de forma a que um mesmo valor de b forneça aproximações equivalentes nos dois casos. Adotando-se as expressões acima para w observa-se que a "precisão" da aproximação é como que proporcional ao valor de b .

As expressões em (5) poderiam ser trivialmente generalizadas permitindo-se que o valor de w variasse com k . Esta alternativa não parece, contudo, promissora pois demandaria que as matrizes $A(w)$ e $C(w)$ fossem recalculadas a cada iteração. Como comentário final, note-se que o sentido da variação $x(k+1)-x(k)$ é invertido quando o sinal de w é invertido. Portanto, se invertermos o sinal de w inverteremos o sentido de percurso da curva.

Tratamento de Singularidades

Embora o sistema dinâmico discreto representado por (5) gere sequências de pontos que atendem à equação (1) com exatidão, casos de singularidades ocorrem quando o gradiente da quadrática é nulo no ponto inicial $x(0)$. De fato, nestes casos toda a sequência é constante e igual a $x(0)$. Além disso, observam-se casos onde a sequência gerada por (5), a partir de um ponto inicial de gradiente não nulo, é convergente, ou seja, o passo diminui a cada iteração tendendo a zero e a sequência converge a um ponto onde o gradiente da quadrática se anula.

Estas singularidades decorrem diretamente do fato de que na equação (5) as variações $x(k+1)-x(k)$ resultam da aplicação de uma transformação linear ao gradiente da quadrática no ponto $x(k)$. Como funções quadráticas são de classe $C1$, ao aproximarmos-nos de um ponto de gradiente nulo estas variações tendem a zero. Para contornarmos este problema basta redefinirmos o sistema (5) de forma conveniente nas regiões do espaço onde as singularidades podem ocorrer.

Felizmente, esses casos de singularidades restringem-se a duas situações bastante simples de serem tratadas: o gradiente da quadrática é nulo no ponto inicial e este ponto é toda a curva de nível (dispensando qualquer tipo de iteração); ou a curva de nível que passa pelo ponto inicial é uma reta (que pode ser gerada independentemente da variação do gradiente da quadrática).

Apresentaremos aqui apenas os resultados finais, sem as devidas provas, decorrentes de um exame detalhado destas alternativas e que se resumem a tres casos:

a) se a matriz Q é singular e q é nulo então adote-se em (5) as matrizes:

$$A(w) = I \quad \text{e} \quad C(w) = \frac{1 \cdot d}{w}$$

onde d é um vetor não nulo que atende a $d'Q d = 0$.

b) se a matriz Q é não singular e $\text{grad}(x(0)) = 2 \cdot Q \cdot x(0) + q = 0$ não produza qualquer sequência de saída.

c) se a matriz Q é não singular, $\text{grad}(x(0))$ é não nulo e

$$\text{grad}(x(0))' \cdot Q \cdot \text{grad}(x(0)) = 0$$

então adote-se em (5) as matrizes :

$$A(w) = I \quad C(w) = \frac{-1 \cdot B \cdot \text{grad}(x(0))}{w}$$

As provas e análises que levaram aos casos acima constam da referência [2].

Conclusões

Apresentamos um método exato para a computação de pontos ao longo de uma cônica expressa por meio de uma equação quadrática. O método demonstrou-se eficiente, robusto, geral e flexível ao permitir um controle adequado da precisão com que a poligonal gerada aproxima a curva. Aplicações onde diversas curvas de nível de uma mesma quadrática devem ser calculadas beneficiam-se deste método já que o sistema linear em que se baseia é calculado uma única vez para todas as curvas. Casos de singularidades apresentados pela solução geral do método são contornados por procedimentos bastante simples que exigem, no pior caso, um teste algébrico aplicado ao ponto inicial da curva.

Bibliografia

[1] Newman, W. and Sproull, R. : **Principles of Interactive Computer Graphics**. 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] Persiano, R.C.M. : Cálculo de curvas de nível de funções quadráticas. Relatório Técnico (em preparo).

Apêndice

Esquema da Prova do Teorema 1

Se $\frac{dx}{dt}(t) = \frac{1}{w} [2.Q x(t) + q]$

então $[2.Q x(t) + q]' \frac{dx}{dt}(t) = 0$

e daí :

$$2.x(t)' Q \frac{dx}{dt}(t) + q' \frac{dx}{dt}(t) = 0$$

Logo, $x(\cdot)$ satisfaz a:

$$x(t)' Q x(t) + q' x(t) = c$$

para todo t .

Esquema da Prova de Teorema 2

Se $x(k+1) = A(w) x(k) + C(w)$

então, para $dx(k) = x(k+1) - x(k)$ vale

ou seja, $dx(k) = 2 \cdot [w \cdot B - Q]^{-1} Q x(k) + [w \cdot B - Q]^{-1} q$

e daí, $[w \cdot B - Q] dx(k) = 2 \cdot Q x(k) + q$

$w \cdot B dx(k) = 2 \cdot Q x(k) + Q dx(k) + q$

Mas, nesse caso pela definição de B, decorre

$$dx(k)' [2 \cdot Q x(k) + Q dx(k) + q] = 0$$

e como $x(k)$ satisfaz (1)

$$x(k)' Q x(k) + q' x(k) = c$$

somando-se as duas últimas igualdades, resulta

$$x(k+1)' Q x(k+1) + q' x(k+1) = c$$

pois Q é simétrica.

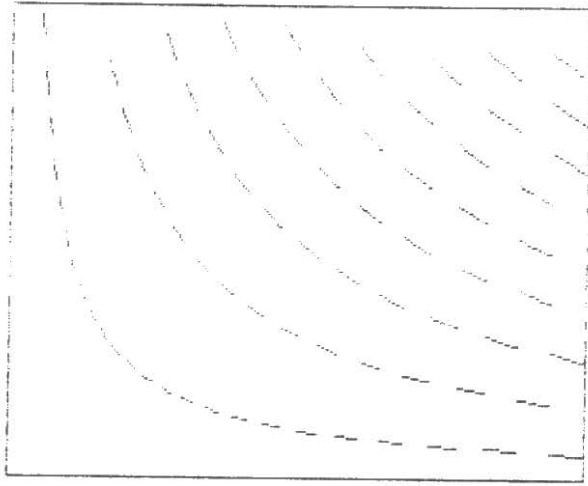
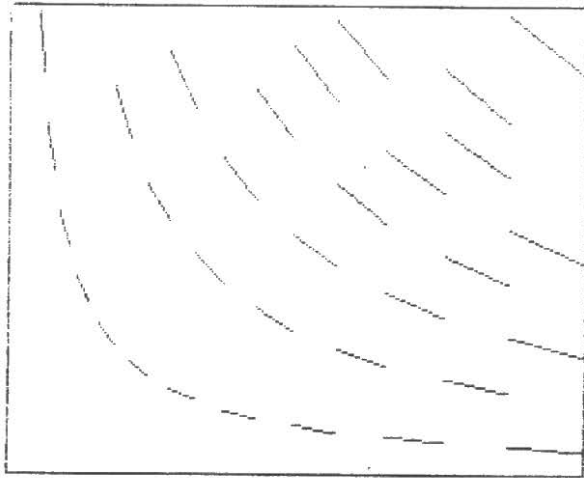
 $w = 1000$  $w = 200$

Fig. 1: Efeito da variação de w . Os extremos dos segmentos de reta ilustram os pontos calculados pelo algoritmo.